El pensamiento variacional y la modelación matemática

Carlos E. Vasco
carlos@pz.harvard.edu
Universidad del Valle (Cali)
Universidad de Manizales (Manizales)
COLOMBIA.

Introducción

Desde mi actual filosofía de las matemáticas y desde mi concepción del mundo del Siglo XXI, pienso que es necesario impulsar decididamente el cambio de las matemáticas estáticas a las dinámicas, del pensamiento de las verdades matemáticas eternas e inmutables al pensamiento variacional, y de la idea tradicional de aplicar las matemáticas a la matematización y modelación de la realidad para construir nuevas matemáticas o reconstruir las antiguas.

Podríamos decir que en la disputa filosófica entre Heráclito y Parménides, el segundo ganó la batalla de las ideas ya en el siglo VI antes de Cristo. Podríamos decir también que Platón, la Escuela de Atenas y la Escuela de Alejandría, especialmente Euclides, adoptaron la idea platónico-parmenidea de que las matemáticas versaban sobre lo ideal, y de que lo ideal era eterno e inmutable. Ese supuesto implícito siguió predominando en el clima filosófico y matemático de Europa y luego de toda América.

Las críticas de Hegel a esa actitud hicieron recapacitar a algunos filósofos del siglo XIX, pero no a la mayoría de los matemáticos. Más aún, la aritmetización del análisis y el triunfo de la épsilons y deltas de Weierstrass sobre los acercamientos tendenciales y temporales a los límites de sucesiones y de funciones reales o complejas, a la continuidad, las derivadas y las integrales, acentuó el acercamiento estático a las matemáticas que produjo los conceptos y teorías matemáticas más refinados de los siglos XIX y XX, actualmente los más apreciados por la comunidad de los llamados "matemáticos puros".

La pregunta es si las matemáticas que todos, incluidos los matemáticos puros, necesitamos en nuestro desempeño profesional, ciudadano y personal no son esas matemáticas puras, estáticas y majestuosas, sino más bien las matemáticas dinámicas y fluidas de una tradición ahora desvalorizada en la que se manejan e inventan modelos mentales y se ejercita el pensamiento variacional.

El diagrama esquemático que representa a las matemáticas que enseñamos desde el preescolar hasta el posgrado es el de esas matemáticas puras, elevadas, que flotan en una atmósfera ideal como flotan las nubes en el aire puro. La aplicación de las matemáticas sería como la lluvia bienhechora que cae sobre la tierra. La pedagogía que le corresponde a este diagrama es la de introducir al estudiante en los sistemas conceptuales de las matemáticas más puras y refinadas de la cultura actual, y la de enseñarle luego, a través de problemas y ejercicios, a aplicarla a fenómenos y procesos de la realidad. Pero la pregunta que me inquieta es de dónde salió ese fino vapor de agua que forma las nubes matemáticas. Mi respuesta es que antes de vivir en esas capas enrarecidas de la atmósfera, ese vapor fue arrancado de los fenómenos y procesos de la realidad por medio del pensamiento variacional y la modelación, esto es, por los procesos de matematización.

Proponer que los alumnos y alumnas empiecen desde el preescolar y la primaria por vivenciar y ejercitar los procesos de matematización, por la modelación matemática y el pensamiento variacional, puede parecer utópico, hasta imposible. Mi tesis es que esa es la decisión más realista y factible que podemos tomar desde hoy mismo en la configuración de currículos, programas, unidades didácticas, textos, materiales y juegos matemáticos. Más aún, en muchos casos no tenemos ya que tomar esa decisión, pues buena parte del trabajo de los educadores matemáticos de los últimos treinta años ha iniciado calladamente ese camino. Estos pioneros nos han propuesto conceptos, teorías, actividades y materiales que apuntan en la nueva dirección.

Como un ejemplo particular, en este trabajo trataré de mostrar cómo ese cambio ya se dio en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia desde el año de 1998, cuando en ese momento histórico del cambio de siglo se recomendó la superación del énfasis en el dominio de los sistemas matemáticos que había propuesto yo mismo en 1978, para fijar la atención del docente en cinco tipos de pensamientos, entre ellos el variacional, y en cinco tipos de procesos, entre ellos el de la modelación matemática de fenómenos y procesos de la realidad. Pero para apreciar ese cambio es necesario retroceder un poco en el tiempo.

Ubicación del pensamiento variacional en el currículo escolar

Uno de los problemas de la elaboración de currículos escolares de matemáticas es el mismo plural de la palabra "matemáticas", que apunta a la diversidad de las matemáticas mismas: la aritmética, la geometría, el análisis, el álgebra abstracta, la combinatoria, la estadística, la teoría de probabilidades, la teoría de conjuntos, la topología, la lógica matemática, la teoría de categorías, etc. Estas disciplinas en las que se han dividido las matemáticas parecen tener poco en común. Por ello han surgido distintos intentos de unificar las matemáticas bajo un solo punto de vista. A finales del siglo XIX, la aritmetización del análisis intentó reducir este último a construcciones con números naturales y el libro *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead trató de reducir todas esas construcciones, incluso la de los números naturales, a la lógica. El grupo Bourbaki trató de reducir todas las ramas de las matemáticas a unas pocas nociones de lógica, conjuntos y estructuras, hasta el punto de proponer que ya no hacía falta el plural, las matemáticas, sino que ahora deberíamos referirnos a todas ellas en singular: la Matemática.

Sin necesidad de hacer una larga historia ni una profunda metafísica de las matemáticas, en lugar de pretender unificarlas como una sola disciplina, hace más de 20 años propuse más bien un acercamiento común a las distintas disciplinas de las matemáticas plurales. Ese acercamiento me permitió presentar los distintos contenidos de las matemáticas escolares utilizando un enfoque por sistemas, considerando en cada sistema matemático específico tres aspectos: sus componentes, sus relaciones y sus transformaciones u operaciones. Además, se distinguían sistemas simbólicos, sistemas conceptuales y sistemas concretos o familiares para los alumnos y alumnas, y la propuesta pedagógica sugería intentar el paso de los sistemas concretos y familiares para los alumnos y alumnas a los sistemas conceptuales y de éstos a los simbólicos, a diferencia de la propuesta usual que parte de los simbólicos hacia los conceptuales, para después aplicar éstos a los problemas concretos. Esa propuesta configuró los programas de matemáticas de la renovación curricular del Ministerio de Educación Nacional de Colombia que comenzó en 1976, y en la cual trabajé desde 1978 hasta 1993.

Allí se proponía que para la educación básica primaria se trabajaran cuatro tipos de sistemas matemáticos: los aritméticos, los geométricos, los métricos y los estocásticos.

En la educación básica secundaria y en la educación media se agregaban los sistemas analíticos, y se trabajaban como herramientas los sistemas conjuntistas, los lógicos y los sistemas generales cuyos componentes eran relaciones u operaciones.

La idea principal del enfoque por sistemas respecto al tema que del presente trabajo, es que en lugar de hablar de álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo, en la educación secundaria y media se privilegiara el estudio de los sistemas analíticos como colecciones de funciones, transformaciones u operadores con sus operaciones y sus relaciones de orden superior. Los números naturales, racionales o reales, o los puntos de la línea, el plano o el espacio *no* son elementos del universo de los sistemas analíticos.

En ese sentido, los sistemas analíticos son apenas un tipo particular de sistemas generales de relaciones y transformaciones, a saber, aquellos cuyos objetos son transformaciones, operaciones, operadores o funciones tomadas activamente, no como relaciones y mucho menos como conjuntos de parejas. Con una metáfora zoológica, los objetos de los sistemas analíticos son monstruos que tragan y transforman números, pero no son números. Desde el punto de vista de Anna Sfard, son reificaciones de procedimientos o algoritmos de operaciones.

Después de seis años de preparación y experimentación, la renovación curricular de las matemáticas con el enfoque por sistemas se promulgó en 1984 por un decreto que inició su aplicación gradual año por año, desde el primero hasta el noveno grado. Pero ese nuevo currículo colombiano duró sólo diez años.

En 1994 se expidió una Ley General de Educación que le quitó al Ministerio de Educación Nacional la potestad curricular directa, quedando reducido a la promulgación de lineamientos curriculares, indicadores de logros y estándares para la elaboración de pruebas y exámenes de Estado. Esta pérdida intempestiva de la potestad curricular directa daba a las instituciones educativas la libertad de formular su propio proyecto educativo institucional (PEI) y de reformular currículos, planes de estudio y programas adecuados a ese proyecto. El resultado previsible fue un gran caos curricular.

Como lo ordenaba esa Ley General de Educación, después de dos años de reuniones y propuestas escritas, realizadas en el Ministerio de Educación Nacional de Colombia bajo la coordinación de Celia Castiblanco, en el año 1998 se publicaron los lineamientos curriculares para el área de matemáticas con dos potentes ideas centrales: el propósito de las matemáticas escolares no se enfocaría ya directamente en el manejo de muchos sistemas matemáticos conceptuales y simbólicos, sino el desarrollo de cinco tipos fundamentales de *pensamiento matemático*: el numérico, el espacial, el métrico, el estocástico y el variacional, a través de cinco *procesos matemáticos básicos*: formular y resolver problemas, comunicar, razonar, modelar procesos y fenómenos de la realidad, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

El dominio de los sistemas matemáticos no es pues ya el propósito central del currículo de matemáticas escolares como lo había propuesto yo mismo durante los veinte años de la renovación curricular que fueron de 1978 a 1998. En los lineamientos, los sistemas matemáticos se ubican en su lugar apropiado como herramientas de las que se puede valer el pensamiento matemático respectivo y como medios potentes que ayudan a desarrollarlo y a refinarlo. Ahora, el propósito central es el desarrollo de esos cinco tipos de pensamiento matemático. Lo que en la propuesta curricular anterior era el paso de los sistemas concretos y familiares para los alumnos a los sistemas conceptuales y simbólicos, se concretó ahora en el proceso de modelación matemática de situaciones de la vida cotidiana.

La propuesta de trabajar por tipos de pensamiento fue pues un paso adelante muy significativo, pues pone el propósito de las matemáticas escolares en el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas y su utilización socialmente más poderosa:

la modelación, sin limitar las matemáticas escolares a la mera aplicación de algoritmos ya conocidos para "resolver problemas", los cuales, más que problemas abiertos y retadores, son apenas ejercicios escolares, por necesarios que éstos sean.

Voy a concentrarme en este trabajo en el pensamiento variacional y en el proceso de modelación o modelización de fenómenos y procesos de la realidad, que–como lo veremos– están íntimamente relacionados.

El pensamiento variacional

Una de las dificultades que se ha encontrado en la interpretación de los lineamientos curriculares para área de matemáticas es que no es muy claro qué se debe entender por "pensamiento variacional". Intentemos acercarnos a ese concepto.

Qué no es

Parecería que las funciones, en particular las funciones cuyo argumento es el tiempo *t*, reflejan matemáticamente las variaciones de la realidad espacio-temporal. Pero pensar en forma variacional no es saberse una definición de función. Al contrario, las definiciones usuales de función son estáticas: conjuntos de parejas ordenadas que no actúan, no se mueven ni hacen nada. Eso estaría bien a lo sumo para la función idéntica, que es la que no cambia nada; pero la función idéntica es la que no es del agrado de los estudiantes, precisamente porque no hace nada.

El pensamiento variacional no es aprenderse las fórmulas de áreas y volúmenes como ba, πr^2, o las de los modelos matemáticos de la física, como f=ma, V=IR, o

s = (1/2)gt^2+v_ot .

Más aún, esos modelos, entendidos sólo como fórmulas para remplazar valores en ellas, obstaculizan el pensamiento variacional, que primero trata de captar qué varía con qué y cómo, antes de escribir nada y, mucho menos, antes de memorizar fórmulas.

No se trata tampoco de dibujar y manejar las gráficas. Al contrario, las gráficas cartesianas paralizan la covariación, y distraen la atención de la covariación hacia la forma estática de la gráfica.

Veamos como ejemplo la gráfica del cuadrado.

[INSERTAR FIGURA 1 AQUI]

Figura 1: La gráfica de la función cuadrado

La parábola estática que se sitúa en el origen de las coordenadas cartesianas no deja ver lo principal de la variación cuadrática, que es que el cero y el uno se quedan quietos; que los reales negativos saltan al lado de los positivos; que los números mayores que uno se agrandan y que se agrandan cada vez más drásticamente en la medida en que son más grandes; que los menores que uno se achican y que se achican cada vez más drásticamente en la medida en que son más pequeños. Eso sí sería pensamiento variacional; pero saberse las gráficas de las funciones usuales no lo es. Más bien se convierten en obstáculos epistemológicos y didácticos al dominio del pensamiento variacional.

Qué es

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.

El movimiento mental de este pensamiento tiene pues un momento de captación de lo que cambia y de lo que permanece constante y de los patrones que se repiten en ciertos procesos, como los cambios de temperatura durante el día y la noche, de los movimientos de caída libre o tiro parabólico; luego tiene un momento de producción de sistemas mentales cuyas variables internas interactúen de manear que reproduzcan con alguna aproximación las covariaciones detectadas, sistemas que podemos llamar "modelos mentales"; luego tiene un momento de echar a andar o “correr” esos modelos mentales para ver qué resultados producen; otro de comparar esos resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata de modelar, y si es el caso, tiene también el momento de revisar y refinar el modelo, o descartarlo y empezar de nuevo.

Sólo cuando hay sistemas simbólicos con sus tecnologías socialmente disponibles, como las palabras, dibujos y otros íconos o gráficos, letras o números, se da también un momento de formulación simbólica del sistema o modelo mental por medio de algún sistema simbólico con su tecnología respectiva, simbolización que puede ser verbal, gestual, pictórica o simbólico-formal, y no sólo esta última, como suele equivocadamente creerse. Esta formulación simbólica permite objetivar el modelo mental, calcular con la representación tecnológicamente disponible, y continuar con los momentos de comparación y reformulación del modelo.

El objeto del pensamiento variacional es pues la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente–pero no exclusivamente–las variaciones en el tiempo. Una manera equivalente de formular su propósito rector es pues tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad.

Pongamos un ejemplo. El profesor sostiene una pelota de caucho en cada mano, y las lanza al aire alternativamente, sin hacer malabares. El estudiante trata de percibir la variación de cada una en el tiempo, y luego la covariación de una con otra. Noto que la una se mueve mientras la otra está quieta. Puedo reproducir mentalmente el movimiento que hace el profesor, lanzar las pelotas al mismo ritmo, a la misma altura que él y hasta me animaría a hacerlo con dos pelotas reales. Si quiero hacer lo mismo que el profesor, algo tengo que estar pensando para poderlo hacer. Algún modelo imaginativo tengo que tener en la cabeza para poder imitarlo. Trato de precisarlo verbal y gestualmente. Trato de pintar unos ejes de coordenadas y de escribir unas ecuaciones. Ahí viene el problema. La representación pictórica es estática. Las fórmulas son difíciles. Los ensayos fracasan. El pensamiento variacional se queda atascado y viene el desánimo y el abandono de la tarea.

El pensamiento variacional requiere el pensamiento métrico y el pensamiento numérico si las mediciones superan el nivel ordinal. Requiere también el pensamiento espacial si una o varias variables son espaciales. Su principal herramienta son los sistemas analíticos, pero puede valerse también de sistemas lógicos, conjuntistas u otros sistemas generales de relaciones y transformaciones.

Para mí, el principal propósito del pensamiento variacional es pues la modelación matemática. No es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios; al contrario, para mí, los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso. Para poder resolver un problema interesante tengo que armar primero un modelo de la situación en donde las variables covaríen en forma semejante a las de la situación problemática, y no puedo hacerlo sin activar mi pensamiento variacional.

Por eso podemos decir que el pensamiento variacional incluye la modelación, sobre la cual hablaremos más detalladamente en seguida. Por lo tanto, podemos esquematizarlo en varias fases o momentos, no necesariamente secuenciales y con muchos caminos de realimentación entre esas fases o momentos:

Una primera fase o momento de captación de patrones de variación: lo que cambia y lo que permanece

Momento de creación de un modelo mental

Momento de echar a andar el modelo

Momento de comparar los resultados con el proceso modelado

Momento de revisión del modelo

Si hay un sistema simbólico con su tecnología socialmente disponible que me permita hacerlo, habría también otros momentos:

Momento de formulación simbólica

Momento de calcular con esa formulación

Momento de comparar los resultados con el proceso modelado

Momento de reformulación del modelo.

Ya veremos más adelante cómo las nuevas tecnologías informáticas permiten nuevos momentos muy potentes del pensamiento variacional y la modelación. En palabras de Raymond Duval, la disponibilidad de nuevos registros semióticos para producir, interpretar y tratar representaciones y traducir de unos registros semióticos a otros es lo que permite avanzar en la conceptualización y comunicarla a otros, objetivarla ante uno mismo y generar nuevas conjeturas y argumentos para rechazarlas o confirmarlas. estos registros semióticos o sistemas de generar representaciones matemáticas propuestos por Duval avanzan, completan y precisan la idea de los sistemas simbólicos que se propuso en la renovación curricular de la República de Colombia, los cuales a su vez pretendían avanzar, completar y precisar la idea tradicional de las notaciones.

Cómo se desarrolla

El pensamiento variacional se desarrolla de múltiples maneras:

Con el pensamiento numérico, si se fija la atención en la manera como varían los números figurados pitagóricos, como la variación de los números cuadrados; con los intentos de captar patrones numéricos que se repiten, como 3, 6, 9, 12, o 3, 9, 27, 81, o 3, 5, 7, 11.

Con el pensamiento espacial, o mejor espacio-temporal, si se acentúan los movimientos, las transformaciones y los cambios, no las figuras estáticas y sus nombres y propiedades y se fija la atención en las variaciones implícitas en ese pensamiento espacio-temporal. Ese es el pensamiento geométrico tomado dinámicamente, no en la forma estática de la geometría euclidiana tradicional. Por ejemplo, atender a la variación del área de un triángulo en posición estándar con el cambio del largo de la base, con el cambio de altura, con el cambio de la posición del vértice a lo largo de una paralela a la base, o con el cambio de la posición de la base a lo largo de la recta en donde está el segmento inicial, mientras se mantiene el vértice fijo. Eso es muy distinto a decir que el área de un triángulo es la base por la altura sobre dos.

Con el pensamiento métrico en cuanto a la diferenciación entre magnitudes, cantidades de las magnitudes, medición inicial anumérica de esas cantidades, ordenación de las mismas y medición numérica.

Con el pensamiento proporcional tradicional, con tal de que no se defina una proporción como la igualdad de dos razones, pues eso es estático y se refiere a la representación de la proporción, no a la covariación entre las magnitudes que se identifican como proporcionales.

Se pueden desarrollar notaciones más acordes con la covariación. Propuse en el programa de la renovación curricular que se trabajara primero la correlación positiva o negativa, y luego se estudiara la proporcionalidad directa entre cantidades (como anotó acertadamente en su tesis de maestría en la Universidad del Valle, en Cali, Colombia, Edgar Guacaneme, entre cantidades absolutas o no-negativas). Así se detecta que la proporcionalidad directa es sólo un tipo muy específico de covariación positiva, y que la proporcionalidad inversa es sólo un tipo muy específico de correlación negativa entre cantidades absolutas o no negativas. En esa notación se pueden usar flechas diagonales con la punta hacia arriba o hacia abajo para indicar que si una aumenta, la otra aumenta o disminuye.

Con las representaciones gestuales. Seymour Papert diría que con el cultivo de "body-syntonic mathematics" o "matemáticas sintónicas con el cuerpo". Por ejemplo, subir y bajar el dedo para el movimiento circular y el armónico simple, la mano extendida para las derivadas y para el aumento o disminución de la pendiente, lo que permite entender el test de las primeras derivadas y entender el test de la segunda derivada mucho mejor que cualquier fórmula.

Con representaciones de máquinas y circuitos, que completan en forma dinámica las representaciones algebraicas, tabulares y cartesianas de las funciones, generalmente tomadas en forma estática.

Con reinterpretaciones dinámicas de las representaciones gráficas y tabulares. Aquí es muy poderosa la pantalla del computador o la calculadora graficadora.

Con las representaciones sagitales de la desacreditada "matemática moderna" ("New Math"), en las cuales se ve más claramente a dónde van los puntos o números del dominio que en la representación cartesiana.

Con el papel cuadriculado, el milimetrado y el ajuste de curvas

Con el estudio de las esplinas cúbicas, que permiten ajustar no sólo el punto de empalme sino la primera derivada en ese punto, para producir gráficas suaves a la vista (no "suaves" en el sentido de C-infinito, sino sólo en el sentido de C-uno).

Con el estudio de las funciones exponenciales, logarítmicas y logísticas. Aquí también es clave el uso de la tecnología electrónica, para utilizar los potentes menús de ajuste de curvas ("curve fitting") en los paquetes matemáticos como ISETL, DERIVE, Maple o Mathematica.

La modelación

Fijemos ahora la atención en la modelación matemática.

Qué no es

Modelar no es aprender a caminar en la pasarela.
No es armar modelitos de balso o de cartón, aunque eso ayuda.
No es dibujar, pintar o modelar en arcilla y plastilina, aunque eso ayuda.
No es aprenderse fórmulas de modelos ya inventados y probados por otros, aunque eso puede ayudar o estorbar, como se dijo arriba a propósito de los modelos usuales de la física matemática.

Qué es

La modelación es pues el arte de producir modelos. Por eso, la modelación matemática es el arte de producir modelos matemáticos que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad. Se trata de un proceso de detección, formulación y proyección de regularidades por medio de la creación de un artefacto mental, un sistema con sus componentes, transformaciones y relaciones, cuyas variables covarían en forma que simulen las regularidades de la covariación de los fenómenos o procesos que se intenta modelar.

Resalto que la modelación es un arte, no una ciencia. Como en la epistemología de las ciencias naturales, para repetir a Karl Popper, no se sabe cómo es la lógica de la invención de modelos, pero sí hay una lógica de la puesta a prueba, la justificación y el refinamiento o abandono de los modelos. No hay pues una lógica de producir modelos matemáticos, pero sí la hay para ponerlos a prueba, ajustarlos, compararlos y generalizarlos o descartarlos. Si acaso quisiéramos hablar de una lógica, no sería la de la deducción ni la de la inducción, sino la de la abducción peirceana.

Para mí, los dos libros clásicos son el de Maki & Thompson (1973) para situaciones de las ciencias sociales y biológicas y el de Gentner & Stevens (1983) para los aspectos cognitivos.

Maki, D. P., and Thompson, M. (1973). Mathematical models and applications. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Gentner, D., and Stevens, A. L. (Eds.). (1983). Mental models. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Pero la producción de libros sobre modelación matemática es muy grande y la lista interminable. Basta hacer una búsqueda en las URL barnesandnoble.com o en amazon.com, bajo "modelación matemática", para darse cuenta de la abundancia de literatura sobre modelación matemática desde la primaria hasta los posgrados. Si se busca en una base de datos como el ERIC con la palabra clave "mathematical modeling" con una sola "L", se va a encontrar literatura distinta de si se busca "mathematical modelling" con doble "L": con la primera ortografía aparece la literatura norteamericana y con la segunda, la literatura inglesa, europea continental y australiana.

Si se hace una búsqueda en la base de datos del ERIC en los últimos diez años, se ve también la cantidad de artículos publicados en este tiempo sobre la modelación matemática en la primaria, la secundaria y la universidad.

En los Estados Unidos hay una entidad llamada "COMAP", dirigida por Solomon Garfunkel y Henry Pollack en la cual se ha trabajado persistentemente en la modelación matemática en las escuelas y colegios. El proyecto se llama "MMOW": Mathematics: Modeling our World.

En Latinoamérica, la persona que más seriamente ha tocado el tema de las que yo conozco es la vice-presidente del CIAEM, quien ahora organiza el XI CIAEM en Blumenau, Brasil, en julio de 2003. Maria Salett Biembengut.

Ella hizo su tesis de maestría en 1990 en Rio Claro, Brasil, sobre la modelación matemática como método de enseñanza y aprendizaje de la matemática en primaria y secundaria, y luego su tesis doctoral en 1997 en Florianópolis sobre la calidad de la enseñanza de las matemáticas en la ingeniería, en la que desarrolla una propuesta metodológica y curricular para reorganizar la enseñanza de las matemáticas alrededor de la modelación matemática en las carreras de ingeniería. De su libro Biembengut (1999) tomé algunas ideas de lo que es la modelación.

Biembengut, M. S. (1999). Modelagem matemática & implicações no ensino e aprendizagem de matemática. Blumenau, SC: FURB.

La revista que más consistentemente ha publicado artículos sobre este tema desde los años 80 es el *International Journal for Mathematical Education, Science and Technology* IJMEST.

La revista canadiense *For the Learning of Mathematics* también ha publicado varios artículos muy interesantes sobre este tema.

Cómo se desarrolla

Como todo arte, el arte de la modelación matemática se aprende practicándolo. Afortunadamente hay muchas propuestas de modelos de diferentes tipos para aplicarlos a distintos tipos de procesos, y muchos casos y problemas que estimulan a la modelación a muy distintos niveles.

La práctica de la modelación en los colegios y universidades está ya muy extendida, pero la investigación sistemática sobre la manera como los alumnos de distintas edades producen e interpretan modelos matemáticos es apenas incipiente. Hay muchas propuestas en todos los niveles educativos, generalmente muy asociadas a la disponibilidad de nuevas tecnologías. En particular, el programa Excel de Microsoft ha sido utilizado con mucha frecuencia para la modelación, lo cual nos debería impulsar a cambiar la notación de la mal llamada "álgebra de bachillerato", pues es muy distinta a la que se utiliza en las hojas de cálculo o "spreadsheets".

Pero programas como ISETL, MAPLE, DERIVE y Mathematica tienen muchas herramientas para plantear, transformar y graficar resultados de distintos modelos.

En cursos más avanzados, las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales proporcionan herramientas muy poderosas para modelar, y la manera actual de visualizar las ecuaciones diferenciales como campos vectoriales en el plano permiten un acercamiento al pensamiento variacional que no era posible antes del desarrollo de los programas graficadores en colores y los procesadores y coprocesadores de alta velocidad.

Los computadores y las calculadoras graficadoras han complementado de manera muy enriquecedora los recursos disponibles para visualizar, apoyar y ejercitar la modelación y para almacenar y poner a disposición de todos los interesados los productos de esa actividad modeladora.

Cuando Jim Kaput desarrolló a partir de 1985 la teoría y la práctica de las representaciones múltiples ligadas, por ejemplo, dividiendo la pantalla en cuatro ventanas para ver la representación algebraica, la tabular, la gráfica cartesiana y una representación icónica de la situación de proporcionalidad directa o función lineal, se empezó a ver lo que se podía hacer en computador que no se podía hacer de ninguna otra manera.

Cuando Judah Schwartz y Michal Yerushalmi desarrollaron en 1985 el "Geometric Supposer", antecesor del "Geometry Sketchpad" y del "Cabri Géomètre", se pudo ver la potencia de los computadores para la exploración geométrica activa y dinámica en los colegios y escuelas.

Su potencial es inmenso, especialmente ahora con el advenimiento de poderosos paquetes de software para modelación, para graficación pseudo-tridimensional, para tutorías interactivas y para simulación.

Las ventajas de la tecnología aparecen cuando después de las fases usuales del pensamiento variacional, una vez se formula simbólicamente el modelo, ya no es difícil programarlo en el computador o la calculadora. Entonces se puede "correr" o ejecutar, parametrizarlo, cambiarlo y recalcular fácilmente los valores que van tomando las variables.

Además, como lo propuso Jim Kaput hace más de quince años, la tecnología permite enlazar distintos modelos y representaciones.

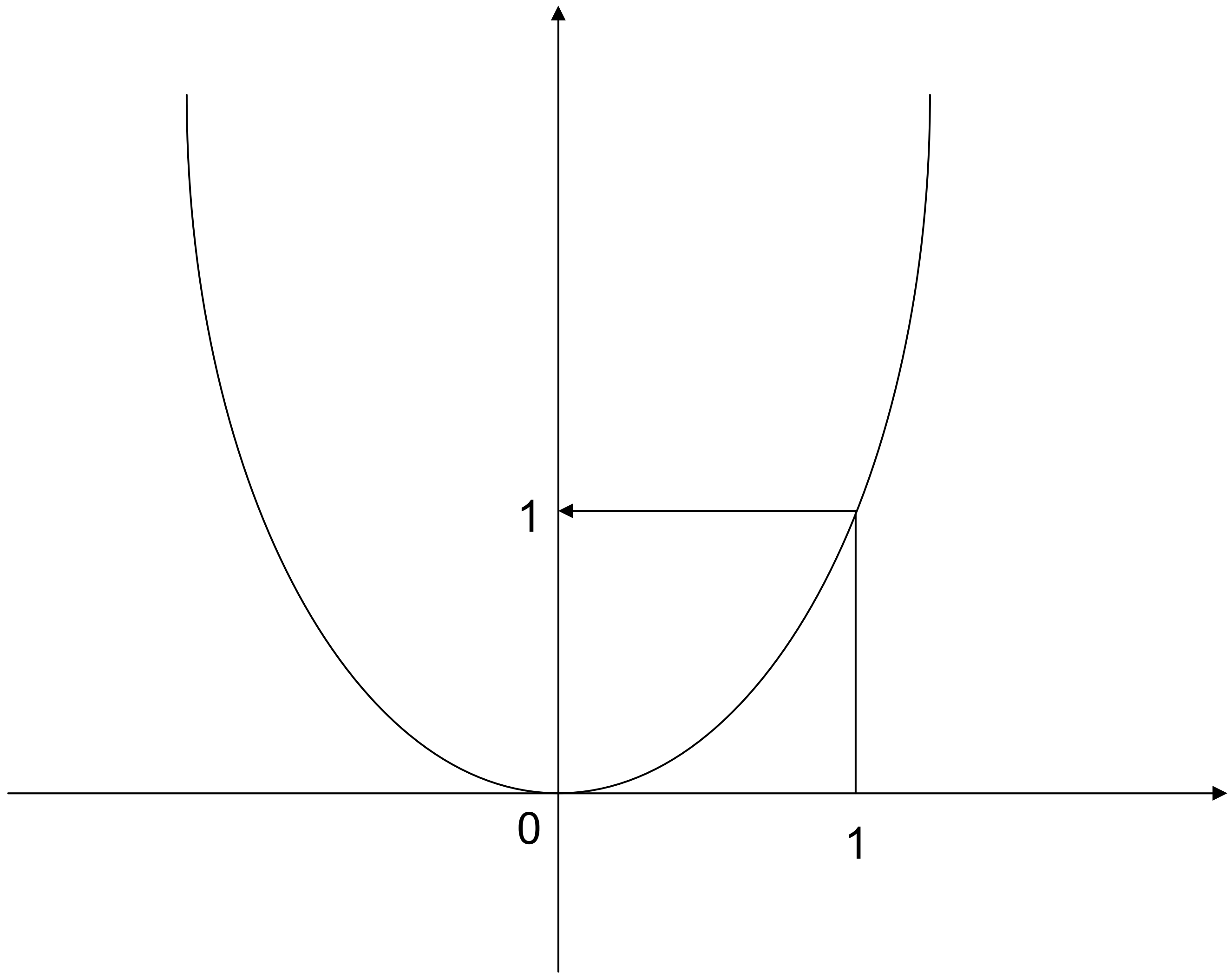
Pero para lograr extraer a las nuevas tecnologías todo ese potencial, no bastan cursillos y conferencias al estilo de la mal llamada "capacitación de docentes". Hacen falta programas largos, con un fuerte componente investigativo, de tipo taller presencial, con buen seguimiento y materiales de apoyo. Por ello, los costos del hardware y el software y los costos de los cursos y talleres de formación permanente son muy altos. Esto nos exige motivar muy bien dichos gastos con el logro de desempeños muy superiores en los estudiantes del proyecto con respecto a los que siguen otras estrategias metodológicas que requieran mucho menor inversión.

La actitud apropiada no es pues la del deslumbramiento y la exageración, sino la de la apropiación laboriosa y creativa, la de la investigación cognitiva, socio-afectiva y evaluativa seria y permanente y la de la reserva crítica que acompañe el entusiasmo y la diversión que permite el uso de estas tecnologías, especialmente en el desarrollo del pensamiento variacional y de las capacidades de modelación matemática por parte de los estudiantes de todos los grados escolares.

Pero aunque en muchos establecimientos educativos no esté disponible esa tecnología electrónica, de todas maneras propongo que impulsemos el cambio de las matemáticas estáticas a las dinámicas, del pensamiento de las verdades matemáticas eternas e inmutables al pensamiento variacional, y de la idea tradicional de aplicar las matemáticas a la matematización y modelación de la realidad para construir nuevas matemáticas o reconstruir las antiguas. Esta reorientación de las matemáticas escolares desde el preescolar hasta la universidad ofrece las mejores esperanzas de una renovación positiva y creativa de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas para el Siglo XXI.

Carlos E. Vasco U.

VER FIGURA 1 EN LA PÁGINA SIGUIENTE


1
0
1